

一种改进的二维离散极坐标 Fourier 变换快速算法

许漫坤,平西建,李天昀
(信息工程大学信息工程学院,河南郑州 450002)

摘要: 在雷达天线、图象配准、图象检索等领域内常常需要用极坐标表示二维数字信号的离散 Fourier 变换(DFT).与笛卡尔坐标系下的二维 DFT 不同,二维离散极坐标 Fourier 变换(DPFT)不具有行列可分性,直接计算非常耗时.本文提出一种改进的 DPFT 的快速算法.该算法针对二维阵列实信号,算法全部过程可用一维运算实现,大大降低了计算复杂度并且适用于实时处理.实验中与直接运算方法相比较,显示了该算法的良好性能.

关键词: 极坐标 Fourier 变换; 移位 DFT; Chirp-Z 变换

中图分类号: TP301.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 07-1140-04

An Improved Fast 2D Discrete Polar Fourier Transform Algorithm

XU Man-kun, PING Xi-jian, LI Tian-yun

(Institute of Information Engineering, University of Information Engineering, Zhengzhou, Henan 450002, China)

Abstract: The problem of calculating discrete Fourier transform in polar coordinate systems, which is called DPFT here, has been given considerable attention in many fields such as antenna, image registration and image retrieval. But the direct computation of DPFT is very time-consuming because of no X-Y separability. This paper proposes an improved fast 2D DPFT algorithm which aims at 2D real array data and can be realized by only 1D calculations. This decreases the overall computational complexity significantly and suits more for real-time signal processing. Compared with the direct calculation, the experimental results demonstrate the good performance of the proposed algorithm.

Key words: polar Fourier transform; shift DFT; chirp-Z transform

1 引言

Fourier 变换作为一种经典有效的变换理论在力学、光学、信号分析与系统设计、通信工程等领域中得到了极为广泛的应用.但是在一些具体应用中,为获得更好的处理方式和结果,往往需要用到极坐标形式下的 Fourier 频谱^[1,2].本文算法针对二维阵列实信号,其表现形式以数字图象居多.在数字图象处理中,二维 Fourier 变换是处理图象去噪、增强、数据压缩、特征提取与分析等很多方面的有力工具.而利用 DPFT 在旋转和尺度变换上的良好性质,可以更好地解决图象配准中的图象旋转变化和尺度伸缩问题;在基于内容的图象检索(CBIR)中,若要提取图象的频域特征,将 Fourier 频谱用极径和极角表示有时更便于处理^[3,4].

笛卡尔坐标系中,二维 DFT 具有行列可分性,分别进行行列一维 FFT 可以得到快速算法二维 FFT.而二维 DPFT 不能行列分离,因而不能直接应用 FFT,运算复杂度高. A Averbuch、R R Coifman 等人于 1998 年提出了 Pseudo-Polar FFT (PPFFT) 算法^[5],将二维信号分为基本行和基本列两部分分别计算,用同质心的方形频域值近似极坐标系中的环形频域值. M Elad、D Donoho 等人在 PPFFT 的基础上通过插值得到近似

的 DPFT^[6]. 本文在 M Elad 的算法上应用移位 DFT 和 Chirp-Z 变换(CZI),提出了改进的 DPFT 快速算法.算法大大节省了计算量且性能良好.

2 二维 DFT 及 DPFT 表示

在笛卡尔坐标系中,设二维时域信号为 $f(k_x, k_y)$, 其中 $k_x = 0, 1, \dots, N_x - 1, k_y = 0, 1, \dots, N_y - 1$. $f(k_x, k_y)$ 在频域 $[0, 2\pi)$ 中的 Fourier 变换可表示为:

$$F(x, y) = \sum_{k_x=0}^{N_x-1} \sum_{k_y=0}^{N_y-1} f(k_x, k_y) \exp[-j(xk_x - yk_y)] \quad (1)$$

作 $x = 2\pi u/N_x, y = 2\pi v/N_y, u = 0, 1, \dots, N_x - 1, v = 0, 1, \dots, N_y - 1$ 离散化后得到二维 DFT 为:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{k_x=0}^{N_x-1} \sum_{k_y=0}^{N_y-1} f(k_x, k_y) \exp[-j(\frac{2\pi}{N_x}k_x u + \frac{2\pi}{N_y}k_y v)] \\ &= \prod_{k_x=0}^{N_x-1} \prod_{k_y=0}^{N_y-1} f[k_x, k_y] \exp(-j(\frac{2\pi}{N_y}k_y v)) \exp(-j\frac{2\pi}{N_x}k_x u) \end{aligned} \quad (2)$$

将 $f(k_x, k_y)$ 的二维 DFT 用极坐标 (r, θ) 来表示. 设 $w_x = r \cos(\theta)$, $w_y = r \sin(\theta)$, 得到其极坐标 Fourier 变换为:

$$F^*(r, \theta) = \sum_{k_x=0}^{N_x-1} \sum_{k_y=0}^{N_y-1} f(k_x, k_y) \exp[-j(k_x r \cos(\theta) + k_y r \sin(\theta))] \quad (3)$$

上式中极径 $r = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$, 极角 $\theta = \arctg(w_y/w_x)$. 将 r 和在 $[0, 2\pi]$ 内离散化, 可得到相应的 DPFT

从式(3)中可得出, 一:二维 DPFT 行列不可分, 因而没有 FFT 那样的直接快速算法; 二:笛卡尔坐标系中二维信号的旋转对应于极坐标系中极角 θ 的偏移、信号的尺度变换对应于极坐标系中极径 r 的伸缩, 这一性质在图象处理中非常有用.

3 快速 DPFT 算法及其改进

在式(3)中, 计算一个二维的 $N \times N$ 阵列信号的极坐标付氏变换 $F^*(r, \theta)$ 需要 $O(N^4)$ 的运算量, 这是非常耗时的. 为了寻求 $F^*(r, \theta)$ 的快速算法, 可以利用一种“近似”的思想^[6], 如图 1 所示. 第一步:用密集的笛卡尔坐标系中的同质心方形来近似极坐标中的环形、在同质心方形上插入密集的等间隔的点. 第二步:在第一步的基础上插值得到极坐标系中的点值. 显然, 笛卡尔坐标系中的点取的越多越密集, 得到的极坐标系中的点就越准确, 但同时相应的算法复杂度也越高.

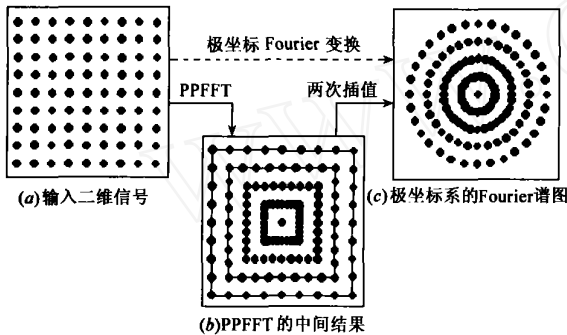


图 1 快速 DPFT 的基本流程

3.1 PPFFT 流程

PPFFT 实现上面所提的“近似”思想的第一步. 在笛卡尔坐标系中构造同质心方形骨架, 见图 2. 图 2 由两部分组成: 基本列部分(实线表示)和基本行部分(虚线表示). 图 3 所示为基本列结构. 基本列和基本行部分中点的结构和处理方式相似, 这里选用基本列结构阐述具体算法. 对一个二维的 $N \times N$ 信号(以 N 为偶数为例, N 为奇数时最外面的方形上点是满的), 在笛卡尔频率轴上建立由 $N \times R$ 个同质心方形和 $N \times S$ 条线段构成的骨架, 使得纵向同一线段上的两邻近点等间距且均为 $2/NR$; 横向同一方形上的两邻近点等间距为 $2/N$. 其中 R 和 S 为插入因子, 均为不小于 1 的整数. 插入因子取值越大, “近似”结果越准确.

此基本列结构满足:

$$\begin{cases} y = 2m/NR, m = 0, 1, \dots, NR/2 - 1 \\ x = 2n/N, n = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \end{cases}$$

代入式(1)求输入信号的频率值, 有:

$$F(x, y) = \sum_{k_x=0}^{N-1} \sum_{k_y=0}^{N-1} f(k_x, k_y) \exp[-j(k_x x + k_y y)] = \sum_{k_x=0}^{N-1} \sum_{k_y=0}^{N-1} f(k_x, k_y) \exp[-j \frac{2m}{NR} y k_x - j k_y x]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k_x=0}^{N-1} \sum_{k_y=0}^{N-1} f(k_x, k_y) \exp(-j y k_y) \exp(-j \frac{2m}{NR} y k_x) \\ &= \sum_{k_x=0}^{N-1} f(k_x, m) \exp(-j \frac{2m}{NR} y k_x), \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} f(k_x, m) &= \sum_{k_y=0}^{N-1} f(k_x, k_y) \exp(-j y k_y) \\ &= \sum_{k_y=0}^{N-1} f(k_x, k_y) \exp(-j \frac{2m}{NR} y k_y) \end{aligned} \quad (5)$$

分析:式(5)是一维运算且 y 在 $[0, 2\pi]$ 中等间隔取值, $R=1$ 时可由 N 点一维 FFT 直接得到; 若 $R>1$, 纵轴的点数大于 N 而输入信号只有 N 行, 则需补零后才能应用 FFT. 本文利用移位 DFT 将式(5)转为 FFT 直接计算, 详见 3.1.1. 式(4)中因为 x 只在 $[0, 2\pi]$ 中等间距取值, 因而不能直接应用一维 FFT 运算, 本文利用 CZT 在局部窄带频谱处理上的独特性质得到式(4)的快速算法, 并利用 FFT 实现 CZT, 详见 3.1.2. 同时本文推导出二共轭对称序列在 $[0, 2\pi]$ 频率区间中的 CZT 存在某种似共轭关系, 从而将 CZT 的总计算量降低一半, 详见 3.1.3.

3.1.1 移位 DFT N 点离散信号 $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$, 其 N 点移位 DFT 记为 $X_l^s(k)$, 有:

$$X_l^s(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp[-j \frac{2\pi}{N} n(k + \frac{l}{M})], k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6)$$

式(6)中, M 为预定常数, l 可取 $0, 1, 2, \dots, M-1$, 移位 DFT 与 DFT 的重要区别体现在分析的频率不同. 显然 $l=0$ 时, 移位 DFT 就是 DFT. 这里着重于怎样用移位 DFT 实现式(5), 不讨论它们的具体区别.

式(6)继续推导:

$$\begin{aligned} X_l^s(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) \exp(-j \frac{2\pi}{MN} nl)] \exp(-j \frac{2\pi}{N} nk) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_l(n) \exp(-j \frac{2\pi}{N} nk) = \text{DFT}[x_l(n)] \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$x_l(n) = x(n) \exp(-j \frac{2\pi}{MN} nl), l=0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (8)$$

式(7)可用 FFT 快速计算. 比较式(5)、(7)和(8), 令 M 取值为式(5)中的 R , l 取 $0, 1, 2, \dots, R-1$, 计算各点 $X_l^s(k)$ 后, 按照 $X_0^s(0), X_1^s(0), \dots, X_{R-1}^s(0), X_0^s(1), X_1^s(1), \dots, X_{R-1}^s(1), \dots, X_0^s(N-1), X_1^s(N-1), \dots, X_{R-1}^s(N-1)$ 的顺序重新排列为一新的频率序列 $\{Y_m\}_{m=0}^{NR-1}$. 将 Y_m 频移得到 $\{Y_m\}_{m=0}^{NR/2-1}$, 即为式(5)中的 $f(k_x, m)$. 对实序列输入而言, 其一维 FFT 运算后得到的序列有共轭对称性, 因而 $X_l^s(k)$ 按照上面提出的排列规则重新排列得到的频率序列 $\{Y_m\}_{m=0}^{NR-1}$ 是共轭对称的.

3.1.2 Chirp Z 变换 有限长序列 $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ 的 DFT 实际上就是序列在单位圆上 Z 变换的 N 点取样, N 个取样点只能均

大减少了运算量.以 $128 * 128$ 象素的二维阵列信号的 DPFT 为例.直接计算的复杂度约为 $o(10^{8.43})$;而 R 和 S 均取 2 时,本文算法计算复杂度约为 $o(10^{6.02})$.4.2 节显示 R 和 S 均取 2 时对图象的处理与直接计算的效果已近似得很好.

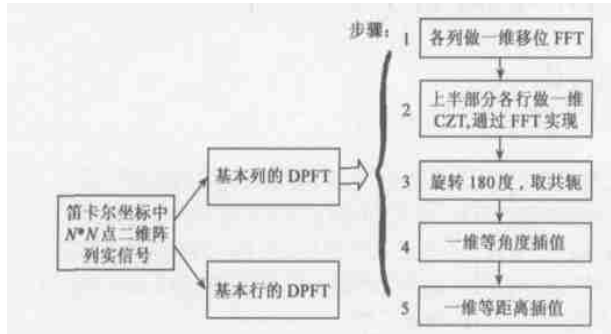


图 6 本文算法流程图

4.2 算法性能

图 7 为算法结果演示.对标准图象 Lena 截取 $128 * 128$ 象素的子图(图 a 所示),给出对其处理后的各归一化幅度谱.图 b 为笛卡尔坐标系 Fourier 幅度谱.图 c 为直接计算得到的极坐标付立叶幅度谱(纵坐标 r ,横坐标 θ).

图 d 和 e 分别为本文算法在 R 和 S 均取 2 以及 R 和 S 均取 4 时得到的极坐标 Fourier 幅度谱(纵坐标 r ,横坐标 θ).对比图 c,虽然存在一定的误差因素和归一化带来的影响,本文算法还是较好地近似了直接计算的结果.图 e 的插入因子取值较大,效果更好一些,这也与 3.1 节中的阐述吻合.实验中插入因子大于 4 时,效果与图 e 没有明显的差别.

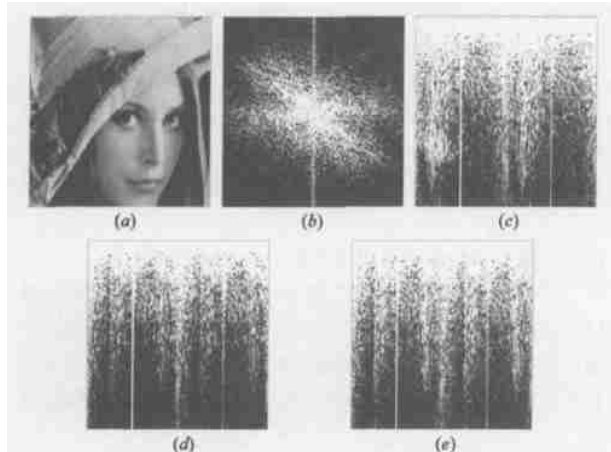


图 7 算法结果演示

5 结论

本文提出一种改进的极坐标 Fourier 变换的快速方法.通过对该方法的具体分析,给出实例以及与直接运算的比较,证

明了该方法快速有效.由于全过程都可以化作一维运算,且多数步骤可以用 FFT 实现,因此此算法便于实时处理.由于算法中不同的插值方法对计算量和实际结果有不同的影响,今后可在插值方法的选取、简化计算和降低复杂度上做进一步改进.

参考文献:

- [1] Jakob van de Laar, Piet Sommen. Comparison of discrete polar fourier transform to 2D Cartesian FFT for non-uniform polar input data [C]. Proc of the ProRISC/ IEEE Workshop, Utrecht, Netherlands, 2000, 355 - 363.
- [2] W Lawton. A new polar Fourier transform for computer-aided tomography and spotlight synthetic aperture radar [J]. IEEE Trans on acoustics, speech and signal processing, 1988, 36(6): 931 - 933.
- [3] Dengsheng Zhang, Guojun Lu. Enhanced generic Fourier descriptors for object - based image retrieval [A]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing [C]. May 2002, 4: 3668 - 3671.
- [4] Yong Man Ro, Munchul Kim, et al. MPEG-7 Homogeneous Texture Descriptor [J]. ETRL Journal, 2001, 23(2): 41 - 50.
- [5] A Averbuch, R Coifman, et al. The pseudopolar FFT and its applications [R]. USA: Yale University, 1999.
- [6] Michael Elad, Dave Donoho, et al. Fast polar Fourier transform [R]. Minneapolis, USA: FoCMF Image & Signal Proc. Workshop, Aug 2002.
- [7] 应启珩,等. 离散时间信号分析和处理[M]. 北京:清华大学出版社, 2001. 155-159.

作者简介:



许漫坤 女,1977 年生于河南省安阳市,郑州信息工程大学信号与信息处理专业博士生,主要研究方向为图象处理与模式识别.



平西建 男,1953 年生于河南省林州市,郑州信息工程大学教授,博士生导师,主要从事图象处理与识别、计算机视觉、信息隐藏等研究.